Corrigé du baccalauréat S Asie 20 juin 2012

EXERCICE 1 **5 points**

1. Il est évident que le point de coordonnées (1 ; 0 ; −5) appartient à $\mathscr{D}$ mais pas à $\mathscr{P}$. Donc, si parallélisme il y a, il est strict.

La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de $\mathscr{D}$ est orthogonal à un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathscr{P}$. Grâce aux équations, on a :

$$\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Le repère est orthonormé donc : $\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{n} \iff x_{\overrightarrow{d}}\times x_{\overrightarrow{n}}+y_{\overrightarrow{d}}\times y_{\overrightarrow{n}}+z_{\overrightarrow{d}}\times z_{\overrightarrow{n}}=0$.

Ce que l'on vérifie facilement.

Ainsi : $\boxed{\textbf{l'affirmation n}^{\textbf{o}}\textbf{ 1 est vraie}}$.

2. La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale, d'après la formule du cours, à :

$$d(A;\mathscr{P})=\frac{|4\times1-9-0+3|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{18}}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi : $\boxed{\textbf{l'affirmation n}^{\textbf{o}}\textbf{ 2 est fausse}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}=0\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3\Longrightarrow$ la droite d'équation $y=3$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-2x}=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Longrightarrow$ la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Ainsi : $\boxed{\textbf{l'affirmation n}^{\textbf{o}}\textbf{ 3 est vraie}}$.

4. Considérons le réel $F(1,5)=\displaystyle\int_1^{1,5}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t\longmapsto(2-t)\mathrm{e}^{-t}$ est évidemment continue et strictement positive sur l'intervalle d'intégration $[1;1,5]$.

Donc, d'après théorème du cours, on en conclut que $\displaystyle\int_1^{1,5}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t>0\quad id\,est\quad F(1,5)\nleqslant 0$.

Ainsi : $\boxed{\textbf{l'affirmation n}^{\textbf{o}}\textbf{ 4 est fausse}}$.

5. On va effectuer une intégration par parties avec :

$$\begin{cases} u'(t)=t^2 & ;\ u(t)=\dfrac{t^3}{3}\\ v(t)=\ln(t) & ;\ v'(t)=\dfrac{1}{t}\end{cases}$$

Et on a bien le droit puisque toutes les fonctions $(u,\ u',\ v,\ v')$ sont continues sur l'intervalle d'intégration $[1;\mathrm{e}]$ (relire les hypothèses du théorème d'intégration par parties). Par suite :

$$I=\left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^3}{3}\ln(\mathrm{e})-0-\left[\frac{t^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\frac{\mathrm{e}^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}.$$

Ainsi : $\boxed{\textbf{l'affirmation n}^{\textbf{o}}\textbf{ 5 est vraie}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

1. a. $|z_{\mathrm{A}}|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$.

$$z_{\mathrm{A}}=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}=z_{\mathrm{A}}}$$

b. $z_{A_1} = \overline{z_A} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
D'autre part, le cours nous donne la formule de la rotation r :

$$r(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(z - z_O\right) + z_O \quad \textit{id est} \quad r(z) = e^{i\frac{\pi}{6}} z$$

Par suite, on obtient :

$$z_B = r\left(z_{A_1}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{6}} = \boxed{2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z_B = -1 - i\sqrt{3}}$$

2. a. $OA = |z_A| = \left|\overline{z_A}\right| = OA_1$.
Comme B est l'image de A_1 par la rotation de centre O (isométrie), on a : $OA_1 = OB$.
$\boxed{\text{Le triangle est isocèle en O}}$.
Mais les lignes qui précèdent sont rendues inutiles par ce qui suit :

$$z_B = -1 - i\sqrt{3} = i\left(-\sqrt{3} + i\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A \Longrightarrow \text{B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle } \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Le triangle est isocèle rectangle en O}}$.

b. On a :
$\left(\overrightarrow{w}\,;\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{w}\,;\overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OA}\right) = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{9\pi}{12}$.
Et :
$\left(\overrightarrow{w}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{w}\,;\overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{9\pi}{12}$.
Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est la bissectrice de l'angle } \left(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OB}\right)}$.

Δ est la bissectrice passant par le sommet du triangle isocèle. Donc Δ est aussi la médiatrice du segment opposé (cf programme de géométrie du collège). On en déduit évidemment que
$\boxed{\text{les points A et B sont symétriques par rapport à la droite } \Delta}$.

3. $z_{B_1} = \overline{z_B} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_{B'} = r\left(z_{B_1}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \Longrightarrow \boxed{B' = A}$

4. L'image de O par la symétrie d'axe Δ est lui-même puisque $O \in \Delta$. Comme la symétrie axiale est une isométrie, on en déduit que le segment [OC] a la même longueur que son image [OD]. S'il fallait le démontrer, c'est fait : OCD est isocèle en O.
On en déduit puisque Δ est la médiatrice du segment [CD] (par définition de la symétrie axiale) qu'elle est aussi la bissectrice de l'angle $\hat{O}$.
Conclusion : $\boxed{\text{D est l'image de C par la rotation } r_1 \text{ de centre O et d'angle } 2\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{w}\right)}$.
$\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{w}\right) = -\arg\left(z_C\right) + \dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{6}$.
On en déduit que :

$$r_1(z) = e^{-i\frac{2\pi}{6}} z \Longrightarrow z_D = r_1\left(z_C\right) = e^{-i\frac{2\pi}{6}}.2e^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow \boxed{z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}}.$$

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie A : Détermination d'une similitude directe.

1. a. On a :
- $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- $z_B = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

b. Voir figure.

2. a. La transformation f est une similitude directe donc elle admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.
Comme $f(A) = B$ et $f(O) = O$, les complexes a et b vérifient le système $\begin{cases} 0 = a \times 0 + b \\ 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + b \end{cases}$ donc
$\begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \end{cases}$.
Donc l'écriture complexe de f est $z' = 2e^{\frac{i\pi}{6}} z$.

b. On sait que f est une similitude directe de centre O.
De plus on sait que le rapport de f est donné par $\left|2e^{\frac{i\pi}{6}}\right| = |2|\left|e^{\frac{i\pi}{6}}\right| = 2$ puisque $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ quel que soit le réel θ et que l'angle de f est donné par $\arg\left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Partie B : étude d'une transformation

1. **a.** La transformation g est la composée de f suivie de s.
Or l'écriture complexe de f est $z' = 2e^{\frac{i\pi}{6}}z$ et l'écriture complexe de s est $z' = \overline{z}$.
Par suite l'écriture complexe de $g = s \circ f$ est $z' = s\left(2e^{\frac{i\pi}{6}}z\right) = \overline{2e\frac{i\pi}{6}}\,z = \overline{2} \times \overline{e\frac{i\pi}{6}} \times \overline{z} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{z}$.

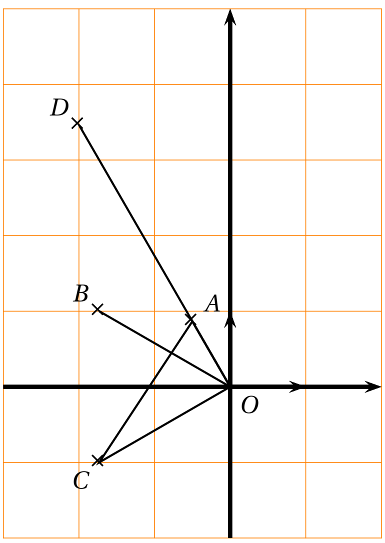
b. On a $z_A = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $g(A) = C$ donc $z_C = z_{A'} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{z_A} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.
On a $g(C) = D$ d'où $z_D = z_{C'} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{z_C} = 2e-\frac{i\pi}{6} \times \overline{2e^{-\frac{5i\pi}{6}}} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Voir figure.

c. On a $\dfrac{z_C}{z_A} = \dfrac{2e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{-\frac{3i\pi}{2}} = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$.
Par suite comme $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)$ et comme $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle OAC est rectangle en O.

d. On a $\dfrac{z_D}{z_A} = \dfrac{4e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 4 \in \mathbb{R}^*$.
Alors comme $\dfrac{z_{\overrightarrow{OD}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \dfrac{z_D - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_D}{z_A} = 4$ on en déduit $z_{\overrightarrow{OD}} = 4z_{\overrightarrow{OA}}$ d'où $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OA}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont donc colinéaires.

2. L'écriture complexe de la composée $g \circ g$ est $z' = g(g(z)) = g\left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{z}\right) = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{z}} = 4e^{-\frac{i\pi}{6}}e^{\frac{i\pi}{6}}\overline{z} = 4z$.
Par conséquent, comme $4 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on en déduit que la transformation $g \circ g$ est une homothétie de rapport 4.
Remarquons que $g(g(O)) = g(O) = O$ donc O est l'unique point invariant de cette homothétie, c'est-à-dire son centre.
Donc $g \circ g$ est l'homothétie de centre O et de rapport 4.

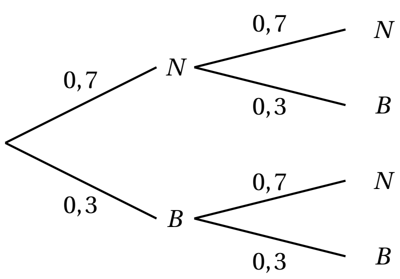
Figure :



EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

1.



D'où : $p = P(G) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 \Rightarrow \boxed{p = 0,42}$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. L'expérience aléatoire a deux issues :

— succès : le joueur gagne avec une probabilité de $p = 0,42$
— échec : le joueur perd avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,58$

On répète cette expérience n fois de manière indépendante. Donc, **la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p** .

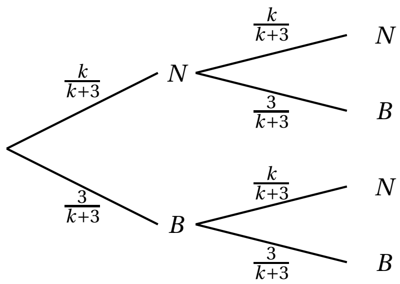
b. $p_n = 1 - P(X = 0) = \boxed{1 - 0,58^n = p_n} \Longrightarrow p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx \boxed{0,996 \approx p_{10}}$

c. $1 - 0,58^n \geqslant 0,99 \Rightarrow 0,01 \geqslant 0,58^n \Rightarrow \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,58^n\right) \Rightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \leqslant n \Rightarrow$

$\boxed{\textbf{le joueur doit jouer au moins 9 parties}}$.

Partie B

1. a.



On en déduit que :

$$p\left(Y_k = 5\right) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{(k+3)} + \frac{3}{(k+3)} \times \frac{k}{(k+3)} \Longrightarrow \boxed{p\left(Y_k = 5\right) = \frac{6k}{(k+3)^2}}$$

b. d

$y_i =$	-9	-1	$+5$
$P\left(Y_k = y_i\right) =$	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. $\mathrm{E}(Y_k) = -9 \times \dfrac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \dfrac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \dfrac{6k}{(k+3)^2} = \dfrac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \dfrac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}$

D'où :

$$\mathrm{E}\left(Y_k\right) > 0 \Longleftrightarrow k \in]3 ; 27[$$

$\boxed{\text{Le jeu est favorable au joueur pour } k \in]3 ; 27[}$.

EXERCICE 4 **5 points**

1.

n	u	v	a	b
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. a. Initialisation

Pour $n = 0$, on a bien $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors :

$u_n + v_n > 0 \Rightarrow \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$

$u_n^2 > 0$ et $v_n^2 > 0 \Rightarrow u_n^2 + v_n^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0$

La proposition est donc vérifiée au rang $n+1$.

Ainsi, la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie pour $n \geqslant 0$, elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence, on en déduit que : $\boxed{u_n > 0 \text{ et } v_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b. $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \dfrac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \dfrac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \dfrac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} =$

$\boxed{\left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2 = v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geqslant 0 \Rightarrow v_{n+1}^2 \geqslant u_{n+1}^2 \Rightarrow v_{n+1} \geqslant u_{n+1} \Rightarrow v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par construction, $v_0 \geqslant u_0$.

Conclusion : $\boxed{v_n \geqslant u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

3. a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$ d'après la question précédente. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$.

b. $0 < u_n \leqslant v_n \Rightarrow u_n^2 \leqslant v_n^2 \Rightarrow u_n^2 + v_n^2 \leqslant v_n^2 + v_n^2 \Rightarrow \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leqslant v_n^2 \Rightarrow \boxed{v_{n+1}^2 \leqslant v_n^2} \Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_n$ (car les éléments de la suite v_n sont positifs).

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc décroissante}}$.

4. On a montré que :

- la suite u_n est croissante donc $u_0 \leqslant u_n$ pour tout entier naturel n,
- la suite v_n est décroissante donc $v_n \leqslant v_0$ pour tout entier naturel n,
- pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ d'où en particulier $\left\{\begin{array}{lll} u_n & \leqslant & v_0 \\ v_n & \leqslant & u_0 \end{array}\right.$

La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

$\boxed{\text{Il s'agit, vous l'aurez compris, de suites adjacentes, car on peut démontrer que } \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0}$.