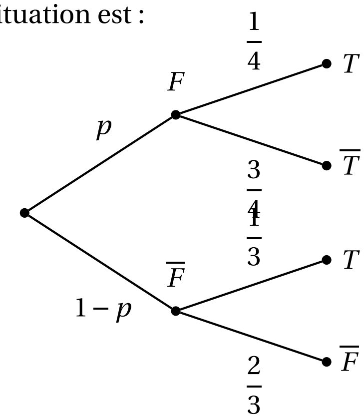
∽ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord ∽
31 mai 2012

Exercice 1

Partie A

Notons p la probabilité que le membre choisi au hasard soit une femme.
L'arbre de probabilités correspondant à la situation est :



1. $\mathrm{T} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{F}) \cup (\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{F}})$. C'est une réunion d'évènements incompatibles, donc :
$p(\mathrm{F}) = p(\mathrm{T} \cap \mathrm{F})) + p(\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{F}}) = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})p(\mathrm{F}) + p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{T})p(\mathrm{T})$.
Par conséquent : $p(\mathrm{T}) = p \times \frac{1}{4} + (1-p) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)p + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}p + \frac{1}{3}$
On sait que $p(\mathrm{T}) = 0,3 = \frac{3}{10}$.
On en déduit : $-\frac{1}{12}p + \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \iff \frac{p}{12} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$ d'où $p = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.
La probabilité de l'évènement F est : $\boxed{p(\mathrm{F}) = \frac{2}{5}}$

2. $p_{\mathrm{T}}(F) = \frac{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \frac{\frac{p}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{10p}{3 \times 4} = \frac{5p}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\boxed{p_{\mathrm{T}}(F) = \frac{1}{3}}$

Partie B

1. (a) Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.
Nous avons répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. N suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \frac{3}{10}$: $\boxed{N \hookrightarrow \mathscr{B}\left(4\,;\,\frac{3}{10}\right)}$.
On sait alors que $p(N = k) = \binom{4}{k} \times \frac{3}{10}^{k} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \times \frac{3}{10}^{k} \times 0,7^{4-k}$.
D'où : $p(N = 2) = \binom{4}{2} \times \frac{3}{10}^{2} \times 0,7^2 = \boxed{\frac{1323}{5000} \approx 0,2646}$.

   (b) Cette fois, N suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\,;\,\frac{3}{10}\right)$.
$p_n = p(N \geqslant 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$: $\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n}$.

(c) $p_n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geqslant 0,7^n \Leftrightarrow \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,7)$ (en appliquant la fonction ln qui est croissante)

d'où $n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,07)} \approx 12.9$.

Il faut que n soit supérieur ou égal à 13 pour que p_n soit supérieur à 0,99.

2. (a) Le nombre de tirages possibles de deux jetons est $\dbinom{100}{2} = 4950$.

X peut prendre les valeurs 35 (deux jetons gagnants), 15 (un seul jeton gagnant) et -5 (deux jetons perdants).

$p(X=2) = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{45}{4950} = \dfrac{1}{110}$.

$p(X=0) = \dfrac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{4005}{4950} = \dfrac{89}{110}$

$p(X=1) = 1 - [p(X=0) + p(X=2)] = 1 - \left(\dfrac{1}{110} + \dfrac{89}{110}\right) = 1 - \dfrac{90}{110} = \dfrac{20}{110} = \dfrac{2}{11}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-5	15	35
$p(X = x_i)$	$\dfrac{89}{110}$	$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{1}{110}$

(b) L'espérance est $E(X) = \displaystyle\sum_i x_i\, p(X = x_i) = -5 \times \dfrac{89}{110} + 15 \times \dfrac{2}{11} + 35\dfrac{1}{110} = -\dfrac{110}{110} = -1$. $\boxed{E(X) = -1}$.

Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.

Exercice 2

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On effectue un changement de variable, en posant $X = \ln(x)$; alors $x = \mathrm{e}^X$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0$ d'après le rappel.

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

   g est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

   Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ (somme de nombres positifs).

   g est donc croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

   Comme $g(1) = 0$, on a donc $g(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

   Le tableau de variation de g est donc :

x	$1 \qquad\qquad +\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow$

   Le minimum de g est 0, donc $g(x)$ est positif pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$.

2. (a) f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$.

   Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \left[\dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}\right] = 1 - \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$.

(b) Comme $x^2 > 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc positif sur $[1\,;\,+\infty[$ avec $f'(1) = 0$.

(c) Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x}$.

D'après la partie A, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$.
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est donc asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour tout $x\ in[1\,;\,+\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x} < 0$ car $\ln(x) \geqslant 0$ et $x > 0$.
La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de son asymptote $\mathscr{D}$ (avec intersection en $x = 1$).

3. (a) On a donc $M_kN_k = y_{N_k} - y_{M_k} = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

(b) L'algorithme est :

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  k PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (log(k)/k>0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, donc f est croissante sur $[0\,;1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

(a) g est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ comme composée de fonctions dérivables. $g'(x) = \tan'(x) \times f'(\tan(x)) = \left(1 + \tan^2 x\right) \times \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = 1$. $\boxed{g'(x) = 1}$

(b) Puisque $g'(x) = 1$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

$g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0$ donc $k = 0$, d'où $\boxed{g(x) = x}$.

$f(1) = f\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$ car $g(x) = x$.

3. f est croissante sur $[0\,;1]$. $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}}$

Partie B

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [1 \times f(x)]\,\mathrm{d}x$.
On pose $u'(x) = 1$. u' et f' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^1 [1 \times f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
$= f(1) - \left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)}$.

2. (a) Pour tout $x \in [0~;~1]$, $x^n f(x) \geqslant 0$ (produit de fonctions positives), donc $I_n \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).

   (b) Pour tout $x \in [0~;~1]$, $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \dfrac{\pi}{4} x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

   $= \dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

   Pour tout $n \geqslant 0$, $\boxed{I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4(n+1)}\right) = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

Exercice 4 (pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{u}~;~\vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.
On note Ω le point d'affixe 1.

1. $f(M) = M \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0~;~1\}$. $\boxed{\Gamma_1 = \{O~;~\Omega\}}$
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
   (a) $a = \sqrt{2}(1-\mathrm{i})$ donc $|a| = \sqrt{2}|1-\mathrm{i}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.
   On en déduit $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.
   (b) On cherche les antécédents de A, c'est à dire les points d'affixe z tels que $z^2 = a$.
   Posons $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors $z^2 = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}$.
   On doit avoir $r^2 = 2$ donc $r = \sqrt{2}$ (car $r > 0$).
   $2\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi$.
   On prend $\theta = -\dfrac{\pi}{8}$ et $\theta = \dfrac{7\pi}{8}$.
   On trouve $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = -z_1$.
   Les deux points ont pour affixe $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}}$ et $\boxed{z_2 = -z_1}$.
3. On cherche z tel que $z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \mathrm{i}y$; alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$.
   $z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$ ou $y = x$.
   Γ_2 est la réunion des deux droites d'équation $y = -x$ et $y = x$.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.
   (a) L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est :
   $z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' - 1 = \mathrm{i}(z-1) \Leftrightarrow z' = \mathrm{i}(z-1) + 1$. (avec $z \neq 1$, car $M \neq \Omega$)

   Or $z' = z^2$ donc $z^2 = \mathrm{i}(z-1) + 1$ d'où $\boxed{z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0}$.
   (b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-1)(z+1-\mathrm{i}) = z^2 + (1-\mathrm{i})z - z - 1 + \mathrm{i} = z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i}$
   donc : $\boxed{z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = (z-1)(z+1-\mathrm{i})}$
   (c) $z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = 0$.
   Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   Les solutions sont $z = 1$ et $z = -1 + \mathrm{i}$. Or $z \neq 1$ donc Γ_3 est constitué de l'unique point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$.
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
   (a) Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2}{z}\right) = \arg(z)$.
   (b) Les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $\arg(z) = k\pi$.
   On en déduit que Γ_4 est l'axe des réels, privé des points de O et de Ω.

Exercice 4 (pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

1. $z' = 5\text{i}z + 6\text{i} + 4$; l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$, donc il s'agit d'une similitude directe de rapport $\boxed{|a| = 5}$, d'angle $\arg(5\text{i}) = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.
   Le point fixe Ω a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6\text{i}+4}{1-5\text{i}} = \boxed{-1+\text{i}}$.
2. Avec les notations de l'énoncé, on a : $z' = x' + \text{i}y' = 5\text{i}(x + \text{i}y) + 6\text{i} + 4$ d'où $\left\{\begin{array}{l} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{array}\right.$

Partie B

1. (a) Soit l'équation $4a + 3b = 5$; Le couple (5 ; -5) est un couple solution.
   On en déduit $4(a-5) = 3(-b-5)$.
   4 et -3 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 3 divise $a-5$ d'où $a-5 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Alors $-b-5 = 4k$.
   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{(5+3k\ ;\ -5-4k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

   (b) $-3x' + 4y' = 37 \Leftrightarrow 15y - 12 + 20x + 24 = 37 \Leftrightarrow 3y + 4x = 5$; voir alors solutions précédentes.
   On veut que $M \in (E)$. On doit avoir $-3 \leqslant 5 + 3k \leqslant 5$ et $-3 \leqslant -5 - 4k \leqslant 5$.
   On en déduit $k = -1$ ou $k = -2$.
   Il y a donc deux couples solutions $\boxed{\text{(2 ; -1) et (-1 ; 3)}}$.

2. (a) $x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 = -5y + 5x + 10 \equiv 0\ [5]$ donc $x' + y'$ est un multiple de 5.

   (b) $(x' - y') - (x' + y') = -2y' \equiv 0\ [2]$.
   $x'^2 - y'^2 = (x' - y')(x' + y')$.
   Si $x'^2 - y'^2 \equiv 0\ [2]$, alors 2 divise $(x' - y')(x' + y')$. Il est facile de montrer que 2 divise l'un des facteurs (sinon, les deux facteurs sont congrus à 1 modulo 2, donc leur produit aussi).
   On en déduit que $\boxed{x' - y' \equiv 0\ [2] \text{ et } x' + y' \equiv 0\ [2]}$.

   (c) Si $x'^2 - y'^2 = 20$, alors $x' + y'$ et $x' - y'$ sont des multiples de 2 d'après ce qui précède. $x' - y' = 2d$ et $x' + y' = 2d'$ donc $(x' - y')(x' + y') = 4dd' = 20$ donc $dd' = 5$.
   5 est premier. On regarde alors toutes les possibilités :
   On a alors :

   - $d = 1$ ou $d' = 5$
   - $d = 5$ ou $d' = 1$
   - $d = 1-$ ou $d' = -5$
   - $d = -5$ ou $d' = -1$

   On obtient alors respectivement :

   - $x' - y' = 2$ et $x' + y' = 10$ d'où $x' = 6$ et $y' = 4$.
   - $x' - y' = 10$ et $x' + y' = 2$ d'où $x' = 6$ et $y' = -4$.
   - $x' - y' = -2$ et $x' + y' = -10$ d'où $x' = -6$ et $y' = -4$.
   - $x' - y' = -10$ et $x' + y' = -2$ d'où $x' = -6$ et $y' = 4$.

   Si $x' = 6$ et $y' = 4$, alors $6 = -5y + 4$ et $4 = 5x + 5$ d'où $y = -\dfrac{2}{5}$ et $x = -\dfrac{2}{5}$. $M \notin E$
   Si $x' = 6$ et $y' = -4$, alors $6 = -5y + 4$ et $-4 = 5x + 5$ d'où $y = -\dfrac{2}{5}$ et $x = 2$. $M \notin E$

Si $x' = -6$ et $y' = -4$, alors $-6 = -5y + 4$ et $-4 = 5x + 5$ d'où $y = 2$ et $x = -2$. $M \in E$
Si $x' = -6$ et $y' = 4$, alors $-6 = -5y + 4$ et $4 = 5x + 5$ d'où $y = 2$ et $x = -\dfrac{2}{5}$ $M \notin E$. Il n'a donc qu'une seule solution : $\boxed{(-2\,;\,2)}$